

УДК 519.6

Е.А. СТРЕЛЬНИКОВА, Д.В. КРЮТЧЕНКО, Ю.В. НАУМЕНКО, О.А. УСАТОВА

Институт проблем машиностроения им. А.Н. Подгорного НАН Украины

АНАЛИЗ УСТОЙЧИВОСТИ КОЛЕБАНИЙ ЖИДКОСТИ В ЖЕСТКИХ РЕЗЕРВУАРАХ ПРИ ПАРАМЕТРИЧЕСКОМ ВОЗБУЖДЕНИИ

Изучены параметрические колебания оболочек вращения, частично заполненных жидкостью и подверженных действию вертикальной возмущающей силы. Предполагается, что жидкость в оболочке идеальная, несжимаемая, а ее движение, вызванное приложенной нагрузкой, является безвихревым. В этих условиях существует потенциал скоростей жидкости, удовлетворяющий уравнению Лапласа. На смоченной поверхности оболочки вращения должны быть выполнены условия непротекания, а на свободной поверхности требуется выполнение кинематического и динамического краевых условий. Сформулирована и решена спектральная краевая задача о свободных колебаниях жидкости в оболочке вращения. Решение этой задачи осуществлено методом граничных элементов. Задача о колебаниях жидкости в оболочке под действием вертикальной возмущающей силы сведена к решению системы дифференциальных уравнений Матье. Оценка устойчивости движения осуществляется с использованием диаграммы Айнса-Сретта.

Ключевые слова: параметрические колебания, оболочки вращения, идеальная несжимаемая жидкость, метод граничных элементов, диаграмма Айнса-Сретта.

О.О. СТРЕЛЬНИКОВА, Д.В. КРЮТЧЕНКО, Ю.В. НАУМЕНКО, О.О. УСАТОВА

Інститут проблем машинобудування ім.А.М.Підгорного НАН України

АНАЛІЗ СТІЙКОСТІ КОЛИВАНЬ РІДИНИ В ЖОРСТКИХ РЕЗЕРВУАРАХ ПРИ ПАРАМЕТРИЧНОМУ ЗБУДЖЕННІ

Досліджено параметричні коливання оболонок обертання, які частково заповнені рідиною і піддані дії вертикальної сили, що збурює. Вважається, що рідина в оболонці ідеальна, нестислива, а її рух, викликаний прикладеним навантаженням, є безвихровим. У цих умовах існує потенціал швидкостей рідини, що задовольняє рівнянню Лапласа. На змоченій поверхні оболонок обертання виконуються умови непротікання, а на вільній поверхні задаються кінематична і динамічна крайові умови. Сформульовано і розв'язано спектральну крайову задачу визначення вільних коливань рідини в оболонці обертання. Розв'язання цієї задачі здійснено методом граничних елементів. Задачу дослідження коливань рідини в оболонці під дією вертикальної сили, що збурює, зведено до розв'язання системи диференціальних рівнянь Мат'є. Оцінка стійкості руху здійснюється з використанням діаграми Айнса-Сретта.

Ключові слова: параметричні коливання, оболонки обертання, ідеальна нестислива рідина, метод граничних елементів, діаграма Айнса-Сретта.

E.A. STRELNIKOVA, D.V. KRUTCHENKO, Y. V. NAUMENKO, O.A. USATOVA

A. Podgorny Institute of Mechanical Engineering Problems NAS of Ukraine

Parametric oscillations of the shells of revolution partially filled with a liquid and subjected to perturbing longitudinal forces are investigated. It is assumed that the liquid in the shell is an ideal and incompressible one, and its motion caused by the applied load is irrotational. In these conditions, there exists a velocity potential of the fluid that satisfies the Laplace equation. To determine this potential in the fluid domain it is necessary to formulate

<https://doi.org/10.32782/2618-0340-2019-3-10>

the boundary conditions. On the wetted surface of the shell of revolution the non-penetration condition is fulfilled, and the kinematic and dynamic boundary conditions are applied on the free liquid surface. The dynamic boundary condition consists in equality of the liquid pressure on the free surface to atmospheric one. The kinematics boundary condition requires that liquid particles always remain on the free surface if they belong it initially. The spectral boundary value problem of determining the free liquid vibrations is formulated for an arbitrary fluid domain. For shells of revolution the spectral problem of determining the frequencies and modes of the liquid vibrations is reduced to solving the eigenvalue problem formulated for a discrete analogue of the system of singular integral equations. This system contains only one-dimensional integrals. The solution of this problem is carried out by the boundary element method. The effective method for evaluating one-dimensional singular integrals is developed. This approach is based on using the characteristic property of the arithmetic-geometric mean. Study of the liquid vibrations in the shell under the perturbing vertical force is reduced to the solution of the system of uncoupled Mathieu differential equations. The assessment of the motion stability is carried out using the Ince-Strutt diagram. A method is proposed that allows us to estimate the stability of parametric oscillations of the shell of revolution, partially filled with the liquid, and under the action of the periodic vertical driving force. To assess the stability of motion, it is necessary to know the spectrum of the natural frequencies of the liquid vibrations in the shell, the amplitude and frequency of the driving force.

Keywords: parametric oscillations, shells of revolution, ideal incompressible liquid, boundary element method, Ince-Strutt diagram.

Постановка проблемы

Проблема колебаний конструкций с отсеками, содержащими жидкость, находится в центре внимания исследователей в течение нескольких последних десятилетий. Численные методы изучения движения жидкости со свободной поверхностью находят широкое применение во многих инженерных приложениях. Если баки заполнены полностью, свободная поверхность не может испытывать сильных осцилляций. Это соответствует началу полета ракетносителя. Однако, на дальнейших стадиях полета, когда уровень заполнения топливом уменьшается, эффект плескания становится доминирующим. Неоднократно отмечалось, что мощные плескания могут привести к нарушению полетной траектории, как это произошло, например, при запусках ракеты-носителя Фалькон 1 (Falcon 1) в 2006, 2007 и 2008 годах. Одной из наиболее важных и актуальных задач при изучении колебаний жидкости в резервуарах является проблема устойчивости движения, особенно при действии вертикальной возбуждающей силы. В этих условиях ускорении силы тяжести становится переменным, и возникает эффект параметрических колебаний.

Анализ последних публикаций и достижений

Первые работы в области анализа колебаний жидкости в резервуарах появились в начале 60-х годов прошлого века. Одна из них была опубликована в 1969 году [1]. В ней проведен анализ плесканий жидкости в цилиндрических баках при различных уровнях гравитации на основе аналитических методов. Частоты колебаний изучались в зависимости от числа Бонда. Обстоятельный анализ исследований по динамике жидкости в сосудах и резервуарах был дан Р. Ибрагимом в монографии [2]. Несмотря на имеющиеся теоретические достижения, проблема колебаний упругих контейнеров и баков с жидкостью остается в центре внимания многих научных школ. Феномен плесканий может быть описан как движение свободной поверхности жидкости, содержащейся в резервуаре, под действием внезапно приложенной нагрузки. Н. Olsen

привел в [3] классификацию колебаний свободной поверхности жидкости в резервуарах, выделив три основные формы плесканий: горизонтальные плескания, вертикальные плескания и вращательные плескания. Плескание – это феномен, который обнаруживается в широком диапазоне промышленных приложений: в контейнерах для хранения сжиженного газа, топливных баках ракетополетителей, в резервуарах грузовых танкеров. В грузовых танкерах проблема плесканий стоит особенно остро: даже малые движения контейнера могут привести к значительным плесканиям, что требует изучения устойчивости. Ряд исследований, посвященных проблемам плесканий жидкости в резервуарах, нашел свое отражение в обстоятельных обзорах [2,4]. Faltinsen в [5] изучал кратковременные нагрузки на резервуары с жидкостью и описал пять различных фаз движения жидкости с разными амплитудами. В [6] проведен численный эксперимент для плоского прямоугольного резервуара с жесткими стенками при действии горизонтального и вертикального ускорения. В этой работе рассматривалась невязкая несжимаемая жидкость, учитывался нелинейный характер движения. Здесь также показано, что основная частота колебаний существенно зависит от ширины резервуара и уровня заполнения. Эффекты вязкости исследовались в [7]. В этой работе доказано, что вязкость проявляется при малых амплитудах и высоком уровне заполнения. Однако, в [8] установлено, что эффектами вязкости можно пренебречь при больших амплитудах плескания. Для исследования плесканий жидкости в резервуарах применяются различные методы. Наиболее эффективным является метод граничных элементов [9, 10]. В последнее время эффективно развиваются методы анализа плесканий в нелинейной постановке [11–13].

Цель исследования

Анализ устойчивости колебаний резервуаров с жидкостью при вертикальных возбуждениях.

Изложение основного материала исследования

Спектральная краевая задача

Рассматривается резервуар в виде оболочки вращения, частично заполненный жидкостью и подверженный действию вертикального возбуждающего воздействия, рис. 1. Здесь S_1 – смоченная жидкостью поверхность оболочки, S_0 – свободная поверхность. Предполагается, что жидкость идеальная, несжимаемая, а ее движение, индуцированное колебаниями оболочки и начавшееся из состояния покоя, является безвихревым. В этих условиях существует потенциал скоростей Φ :

$$V_x = \frac{\partial \Phi}{\partial x}; V_y = \frac{\partial \Phi}{\partial y}; V_z = \frac{\partial \Phi}{\partial z},$$

который удовлетворяет уравнению Лапласа. Предположение о потенциальности потока не нарушает общности, так как предполагается, что движение жидкости начинается из состояния покоя, и по теореме Кельвина остается потенциальным во все последующие моменты движения.

Динамическая составляющая давления жидкости на стенки резервуара определяется по формуле, представляющей собой линеаризованный интеграл Коши-Лагранжа:

$$p - p_0 = -\rho_1 \left(\frac{\partial \Phi}{\partial t} + (a_z(t) + g)z + a_x(t)x \right).$$

Здесь g – ускорение свободного падения, $a_x(t)$, $a_z(t)$ – ускорение вынуждающей силы в горизонтальном и вертикальном направлениях. Для определения потенциала скоростей Φ имеем следующую краевую задачу для уравнения Лапласа:

$$\nabla^2 \Phi = 0, \quad \frac{\partial \Phi}{\partial \mathbf{n}} \Big|_{S_1} = 0, \quad \frac{\partial \Phi}{\partial \mathbf{n}} = \frac{\partial \zeta}{\partial t} \Big|_{S_0}, \quad \frac{\partial \Phi}{\partial t} + (g + a_z(t))z + a_x(t)x \Big|_{S_0} = 0. \quad (1)$$

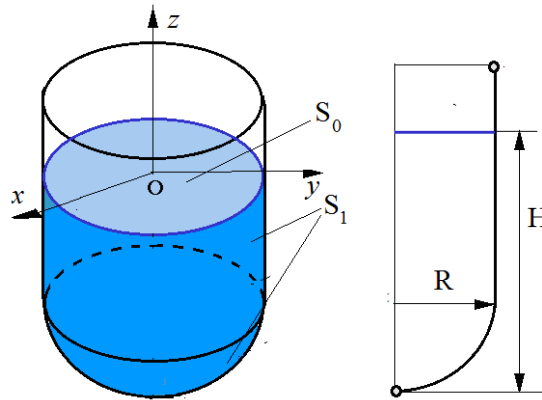


Рис. 1. Оболочка вращения с жидкостью.

Условие разрешимости краевой задачи (1) состоит в следующем:

$$\iint_{S_0} \frac{\partial \Phi}{\partial \mathbf{n}} dS_0 = 0. \quad (2)$$

Для определения функции Φ рассмотрим вспомогательную задачу. Пусть функция $\zeta(t, x, y, z)$ описывает положение и форму свободной поверхности. Введем вспомогательную функцию Ψ , которую определим из следующих соотношений:

$$\nabla^2 \Psi = 0, \quad \frac{\partial \Psi}{\partial \mathbf{n}} \Big|_{S_1} = 0, \quad \frac{\partial \Psi}{\partial \mathbf{n}} = \frac{\chi^2}{g} \Psi \Big|_{S_0}, \quad \iint_{S_0} \frac{\partial \Psi}{\partial \mathbf{n}} dS_0 = 0. \quad (3)$$

Отметим, что задача (3) представляет собой спектральную краевую задачу для определения частот и форм свободных колебаний жидкости в резервуаре.

Система граничных интегральных уравнений

Основное соотношение для определения функции ψ из уравнений (3) записывается для произвольной области с границами S_0, S_1 в форме [14]:

$$2\pi\psi(P_0) = \iint_S \frac{\partial \psi}{\partial \mathbf{n}} \frac{1}{|P - P_0|} dS - \iint_S \psi \frac{\partial}{\partial \mathbf{n}} \frac{1}{|P - P_0|} dS, \quad S = S_0 \cup S_1. \quad (4)$$

Уравнения задачи (3) приобретают вид:

$$2\pi\psi_1 + \iint_{S_1} \psi_1 \frac{\partial}{\partial \mathbf{n}} \left(\frac{1}{|P - P_0|} \right) dS_1 - \frac{\chi^2}{g} \iint_{S_0} \psi_0 \frac{1}{|P - P_0|} dS_0 + \iint_{S_0} \psi_0 \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{1}{|P - P_0|} \right) dS_0 = 0,$$

$$-\iint_{S_1} \psi_1 \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{1}{|P-P_0|} \right) dS_1 - 2\pi\psi_0 + \frac{\chi^2}{g} \iint_{S_0} \psi_0 \frac{1}{|P-P_0|} dS_0 = 0, \quad (5)$$

где $|P-P_0|$ – декартово расстояние между точками P и P_0 . В уравнениях (5) для удобства через ψ_0 обозначены значения потенциала Ψ в узлах свободной поверхности S_0 , и через ψ_1 – его значения в узлах смоченной поверхности S_1 . Далее введены следующие интегральные операторы:

$$\begin{aligned} \mathbf{A}\psi_1 &= 2\pi\mathbf{I}\psi_1 + \iint_{S_1} \psi_1 \frac{\partial}{\partial \mathbf{n}} \frac{1}{r(P, P_0)} dS_1, \quad \mathbf{B}\psi_0 = \iint_{S_0} \psi_0 \frac{1}{r} dS_0, \quad \mathbf{C}\psi_0 = \iint_{S_0} \psi_0 \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{1}{r} \right) dS_0, \\ \mathbf{D}\psi_1 &= -\iint_{S_1} \psi_1 \frac{\partial}{\partial \mathbf{n}} \frac{1}{|P-P_0|} dS_1, \quad \mathbf{F}\psi_0 = \iint_{S_0} \psi_0 \frac{1}{r} dS_0. \end{aligned} \quad (6)$$

С учетом (6) краевая задача (3) принимает вид:

$$\mathbf{A}\psi_1 = \frac{\chi^2}{g} \mathbf{B}\psi_0 - \mathbf{C}\psi_0, \quad P_0 \in S_1, \quad \mathbf{D}\psi_1 = 2\pi\mathbf{I}\psi_0 - \frac{\chi^2}{g} \mathbf{F}\psi_0, \quad P_0 \in S_0. \quad (7)$$

Исключив функцию ψ_1 из уравнений (7), приходим к следующей проблеме собственных значений относительно неизвестных значений ψ_0 на свободной поверхности:

$$(\mathbf{D}\mathbf{A}^{-1}\mathbf{C} + 2\pi\mathbf{I})\psi_0 - \lambda(\mathbf{D}\mathbf{A}^{-1}\mathbf{B} + \mathbf{F})\psi_0 = 0, \quad \lambda = \chi^2/g. \quad (8)$$

Решение задачи (8) дает собственные формы и собственные частоты колебаний жидкости в жесткой оболочке. Рассмотрим краевую задачу (8) для произвольной оболочки вращения. В цилиндрической системе координат (r, z, θ) имеем:

$$\Phi = \sum_{\alpha=0}^N \cos \alpha \theta \sum_{k=1}^M d_{\alpha k}(t) \varphi_{\alpha k}(r, z). \quad (9)$$

Здесь α – номер гармоники, индексы αk – номера форм, соответствующих данному α . Таким образом, частоты и формы свободных могут быть рассмотрены отдельно для каждой гармоники α .

Из (1) и (9) получаем следующее представление для функции, характеризующей уровень подъема свободной поверхности:

$$\zeta = \frac{1}{g} \sum_{\alpha=0}^N \cos \alpha \theta \sum_{k=1}^M \chi_{\alpha k}^2 d_{\alpha k}(t) \varphi_{\alpha k}(r, 0). \quad (10)$$

Сведем интегралы в (6) к одномерным, следуя [15]. Получим для каждой гармоники α :

$$\begin{aligned}
 \iint_{S_1} \psi_1 \frac{\partial}{\partial \mathbf{n}} \left(\frac{1}{|P - P_0|} \right) dS_1 &= \int_r \psi_1(z) \Theta(z, z_0) r(z) d\Gamma, \\
 \iint_{S_0} \psi_0 \frac{1}{|P - P_0|} dS_0 &= \int_0^R \psi_0(r) \Phi(P, P_0) r dr, \\
 \Theta(z, z_0) &= \frac{4}{\sqrt{a+b}} \left\{ \frac{1}{2r} \left[\frac{r^2 - r_0^2 + (z_0 - z)^2}{a-b} E_\alpha(k) - F_\alpha(k) \right] n_r + \frac{z_0 - z}{a-b} E_\alpha(k) n_z \right\}, \\
 \Phi(P, P_0) &= \frac{4}{\sqrt{a+b}} F_\alpha(k), \quad E_\alpha(k) = (-1)^\alpha (1 - 16\alpha^2)^{\pi/2} \int_0^{\pi/2} \cos 2\alpha\psi \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \psi} d\psi, \\
 F_\alpha(k) &= (-1)^\alpha \int_0^{\pi/2} \frac{\cos 2\alpha\psi d\psi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \psi}}, \quad a = r^2 + r_0^2 + (z - z_0)^2, \quad b = 2rr_0, \quad k^2 = \frac{2b}{a+b}.
 \end{aligned} \tag{11}$$

Вычисление одномерных сингулярных интегралов в (11) осуществлено с использованием подходов, предложенных в [15, 16].

Подставим уравнения (9), (10) для Φ и ζ в граничное динамическое условие на свободной поверхности $z = \zeta(t, x, y)$. Поскольку в цилиндрической системе координат $x = \rho \cos \theta$, получим, ограничиваясь двумя гармониками:

$$\sum_{n=0}^1 \cos \alpha \theta \sum_{k=1}^M \left[\ddot{d}_{\alpha k}(t) + \chi_{\alpha k}^2 \left(1 + \frac{a_z(t)}{g} \right) d_{\alpha k}(t) \right] \varphi_{\alpha k}(r, z) + r \cos \theta a_x(t) = 0, \quad z = \zeta. \tag{12}$$

Выполнив скалярное умножение равенства (12) на $\varphi_{\alpha l} (\alpha = 0, 1; l = \overline{1, M})$ и используя условие ортогональности собственных форм [17], получим несвязанную систему обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка:

$$\ddot{d}_{1k} + \chi_{1k}^2 d_{1k} + a_x(t) F_{1k} = 0, \quad \ddot{d}_{0k} + \chi_{0k}^2 \left(1 + \frac{a_z(t)}{g} \right) d_{0k} = 0, \quad F_{1k} = \frac{(r, \varphi_{1k})}{(\varphi_{1k}, \varphi_{1k})}; \quad k = \overline{1, M}. \tag{13}$$

Для однозначного решения системы (13) требуется задание начальных условий.

Цилиндрическая оболочка под действием вынуждающей вертикальной силы

Рассмотрим цилиндрическую оболочку радиуса $R=1$ м, заполненную жидкостью до высоты $H=1$ м и находящуюся под действием вертикальной гармонической нагрузки $a_z(t) = -a_2 \cos \omega t$. Система уравнений (13) приобретает вид несвязанных уравнений Матье:

$$\ddot{d}_{0k} + \chi_{0k}^2 \left(1 - \frac{a_2 \cos \omega t}{g} \right) d_{0k} = 0, \quad k = \overline{1, M}. \tag{14}$$

Рассматривались параметрические колебания жидкости в цилиндрической оболочке при различных значениях частоты ω . На рис. 2а ($\omega=3$ Гц) и 2б ($\omega=12.24$ Гц) показаны графики изменения уровня свободной поверхности в точке $\rho=0, z=\zeta$ при следующих начальных условиях:

$$\dot{d}_{01}(0) = 0.05, \dot{d}_{0k}(0) = 0.0, k = \overline{2, M}, d_{0k}(0) = 0, k = \overline{1, M}.$$

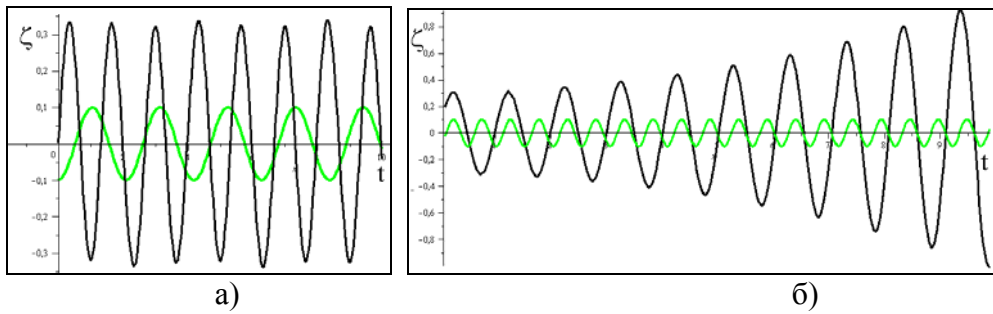


Рис. 2. Изменение уровня подъема свободной поверхности, $a_2 = 1$.

Здесь зелеными линиями показаны графики изменения вынуждающей нагрузки, черными – уровня подъема свободной поверхности. Заметим, что частота $\chi = 6.125$ Гц является низшей частотой осесимметричных колебаний. Если частота вынуждающей силы приблизительно вдвое больше низшей частоты, происходят параметрические колебания с возрастающей амплитудой, т.е. теряется устойчивость движения. Для уточненной оценки областей устойчивости используем диаграмму Айнса-Стретта в форме, предложенной в [18]. Для этого преобразуем уравнения (14) к виду:

$$\frac{d^2 u}{d\tau^2} + \kappa(1 - \mu \cos \tau)u = 0, \quad \tau = \omega t, \quad \kappa = \frac{\chi_k^2}{\omega^2}, \quad \mu = \frac{a_2}{g}, \quad u = d_{0k}, \quad k = \overline{1, M}. \quad (15)$$

Диаграмма Айнса-Стретта показана на рис. 3.

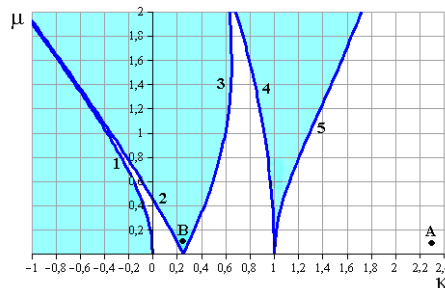


Рис. 3 Диаграмма Айнса –Стретта.

Здесь кривые (1)–(5) построены с помощью соотношений:

$$\mu_1(\kappa) = 2\sqrt{\kappa(\kappa-1)(\kappa-4)/(3\kappa-8)}, \quad \kappa < 0,$$

$$\mu_2(\kappa) = \frac{1}{4}\sqrt{(9-4\kappa)(13-29\kappa)} - (9-4\kappa), \quad 0 < \kappa < 1/4,$$

$$\mu_3(\kappa) = \frac{1}{4}\left(9-4\kappa \mp \sqrt{(9-4\kappa)(13-29\kappa)}\right), \quad 1/4 < \kappa < 13/20,$$

$$\mu_4(\kappa) = \sqrt{2(\kappa-1)(\kappa-4)(\kappa-9)/(\kappa-5)}, \quad 13/20 < \kappa < 1,$$

$$\mu_5(\kappa) = 2\sqrt{\kappa(\kappa-1)(\kappa-4)/(3\kappa-8)}, \quad \kappa > 1.$$

Эти кривые делят плоскость (κ, μ) на области, соответствующие устойчивым и неустойчивым (затененные) колебаниям жидкости в рассмотренном резервуаре.

Результатам, приведенным на рис. 2, соответствуют точки A , и B с координатами: $A(2.34; 0.102)$; $B(0.25; 0.102)$. По данной диаграмме можно оценить устойчивость вертикальных колебаний при известных частотах вынуждающей силы, частотах свободных колебаний и амплитуде вынуждающей силы.

Выводы

Предложен метод, позволяющий оценить устойчивость параметрических колебаний оболочки вращения, частично заполненной жидкостью, и находящейся под действием периодической вертикальной вынуждающей силы. Для оценки устойчивости движения необходимо знать спектр собственных частот оболочки, амплитуду и частоту вынуждающей силы. Спектральная задача определения частот и форм произвольной оболочки вращения сведена к решению проблемы собственных значений, сформулированной для дискретного аналога системы сингулярных интегральных уравнений. Решение системы сингулярных интегральных уравнений получено с использованием метода граничных элементов. Задача о колебаниях жидкости в оболочке под действием вертикальной возмущающей силы сведена к решению системы дифференциальных уравнений Матье.

Список использованной литературы

1. Salzman Jack A., William J. Masica. Lateral Sloshing in Cylinders under Low-Gravity Conditions. Washington, D.C.: National Aeronautics and Space Administration, 1969. 33 p.
2. Ibrahim, R. Liquid Sloshing Dynamics: Theory and Applications. New York: Cambridge University Press, 2005. 998 p.
3. Olsen H.. What is Sloshing? Seminar on Liquid Sloshing. Hovik: Det Norske Veritas, 1976.
4. Ibrahim R.A., Pilipchuck V.N., Ikeda T. Recent Advances in Liquid Sloshing Dynamics. *Applied Mechanics Reviews*. 2001. Vol. 54, № 2. P. 133–199.
5. Faltinsen O., Rognebakke O., Timokha A. Resonant Three Dimensional Nonlinear Sloshing in a Square-Base Basin. Part 2. Effect of Higher Modes. *Journal of Fluid Mechanics*. 2005. Vol. 523. P. 199–218.
6. Chen B.F, Chiang H.W. Complete 2D and Fully Nonlinear Analysis of Ideal Fluid in Tanks. *Journal of Engineering Mechanics*. 1999. Vol. 125, № 1. P. 70–78.
7. Faltinsen O.M., Rognebakke O.F. Sloshing. Proceedings of the NAV2000: International Conference on Ship and Ship Research (Italy, Venice, September 19–22, 2000), Venice, 2000.
8. Bass R.L., Bowles J.E.B., Trundell R.W., Navickas J., Peck J.C., Yoshimura N., Endo S., Pots B.F.M. Modeling Criteria for Scaled LNG Sloshing Experiments. *Transactions of the American Society of Mechanical Engineers*. 1985. Vol. 107. P. 272–280.
9. Gnitko V., Degtyariv K., Naumenko V., Strelnikova E. Coupled BEM and FEM Analysis of fluid-structure interaction in dual compartment tanks. *International Journal of Computational Methods and Experimental Measurements*. 2018. Vol. 6. Issue 6. P. 976–988.
10. Gnitko V., Degtyarev K., Naumenko V., Strelnikova E. Reduced Boundary Element Method for Liquid Sloshing Analysis of Cylindrical and Conical Tanks with Baffles. *International Journal of Electronic Engineering and Computer Sciences*. 2016. Vol. 1. Issue 1. P. 14–27.

11. Lukovsky I.A., Timokha A.N. Multimodal method in sloshing. *Journal of Mathematical Sciences*. 2017. Vol. 220. Issue 3. P. 239-253.
12. Dongya Zhao, Zhiqiang Hu, Gang Chen, Serena Lim, Shuqi Wan. Nonlinear Sloshing in Rectangular Tanks under Forced Excitation. *International Journal of Naval Architecture and Ocean Engineering*. 2018. № 10. P. 545–565.
13. Jiadong Wang, Sai Huen Lo, Ding Zhou, Yun Dong. Nonlinear Sloshing of Liquid in a Rigid Cylindrical Container with a Rigid Annular Baffle under Lateral Excitation. *Shock and Vibration*. 2019. Volume 2019. DOI: 10.1155/2019/5398038.
14. Brebbia, C.A., Telles, J.C.F., Wrobel, L.C. Boundary Element Techniques. Berlin and New York: Springer-Verlag, 1984. 466 p.
15. Strelnikova E., Yeseleva E., Gnitko V., Naumenko V. Free and Forced Vibrations of the Shells of Revolution Interacting with the Liquid. Proceedings of the XXXII Conference Boundary Elements and Other Mesh Reduction Methods. WITPress, Transaction on Modeling and Simulation, 2010. Vol. 50. P. 203–211.
16. Gnitko V., Marchenko U., Naumenko V., Strelnikova E., Forced vibrations of tanks partially filled with the liquid under seismic load. Proceedings of the XXXIII Conference Boundary elements and other mesh reduction methods. WITPress, Transaction on Modeling and Simulation, 2011. Vol. 52. P. 285–296.
17. Faltinsen O.M., Timokha A.N. Sloshing. New York: Cambridge University Press, 2009.
18. Butikov E. Analytical Expressions for Stability Regions in the Ince–Strutt Diagram of Mathieu Equation. *American Journal of Physics*. 2018. Vol. 86. Issue 4. P. 257–267.

References

1. Salzman, Jack A., & William, J. Masica. (1969) Lateral Sloshing in Cylinders under Low-Gravity Conditions. Washington, D.C.: National Aeronautics and Space Administration.
2. Ibrahim, R. (2005) Liquid Sloshing Dynamics: Theory and Applications. New York: Cambridge University Press.
3. Olsen, H.. What is Sloshing? Seminar on Liquid Sloshing. (1976) Hovik: Det Norske Veritas.
4. Ibrahim, R.A., Pilipchuck, V.N., & Ikeda, T. (2001) Recent Advances in Liquid Sloshing Dynamics. *Applied Mechanics Reviews*. **54**, 2, 133–199.
5. Faltinsen, O., Rognebakke, O., & Timokha, A. (2005) Resonant Three Dimensional Nonlinear Sloshing in a Square-Base Basin. Part 2. Effect of Higher Modes. *Journal of Fluid Mechanics*. **523**, 199–218.
6. Chen, B.F, & Chiang, H.W. (1999) Complete 2D and Fully Nonlinear Analysis of Ideal Fluid in Tanks. *Journal of Engineering Mechanics*. **125**, 1, 70–78.
7. Faltinsen, O.M., & Rognebakke, O.F. Sloshing. (2000) Proceedings of the NAV2000: International Conference on Ship and Ship Research (Italy, Venice, September 19–22, 2000), Venice.
8. Bass, R.L., Bowles, J.E.B., Trundell, R.W., Navickas, J., Peck, J.C, Yoshimura, N., Endo, S., & Pots, B.F.M. (1985) Modeling Criteria for Scaled LNG Sloshing Experiments. *Transactions of the American Society of Mechanical Engineers*. **107**, 272–280.
9. Gnitko, V., Degtyariov, K., Naumenko, V., & Strelnikova, E. (2018) Coupled BEM and FEM Analysis of fluid-structure interaction in dual compartment tanks. *International Journal of Computational Methods and Experimental Measurements*. **6**, 6, 976–988.

10. Gnitko, V., Degtyarev, K., Naumenko, V., & Strelnikova, E. (2016) Reduced Boundary Element Method for Liquid Sloshing Analysis of Cylindrical and Conical Tanks with Baffles. *International Journal of Electronic Engineering and Computer Sciences*. **1**, 1, 14–27.
11. Lukovsky, I.A., & Timokha, A.N. (2017) Multimodal method in sloshing. *Journal of Mathematical Sciences*. **220**, 3, 239-253.
12. Dongya, Zhao, Zhiqiang, Hu, Gang, Chen, Serena, Lim, & Shuqi, Wan. (2018) Nonlinear Sloshing in Rectangular Tanks under Forced Excitation. *International Journal of Naval Architecture and Ocean Engineering*. **10**, 545–565.
13. Jiadong, Wang, Sai, Huen Lo, Ding, Zhou, & Yun, Dong. (2019) Nonlinear Sloshing of Liquid in a Rigid Cylindrical Container with a Rigid Annular Baffle under Lateral Excitation. *Shock and Vibration*. **2019**. DOI: 10.1155/2019/5398038.
14. Brebbia, C.A., Telles, J.C.F., & Wrobel, L.C. (1984) Boundary Element Techniques. Berlin and New York: Springer-Verlag.
15. Strelnikova, E., Yeseleva, E., Gnitko, V., & Naumenko, V. (2010) Free and Forced Vibrations of the Shells of Revolution Interacting with the Liquid. Proceedings of the XXXII Conference Boundary Elements and Other Mesh Reduction Methods. WITPress, Transaction on Modeling and Simulation. Vol. 50, pp. 203–211.
16. Gnitko, V., Marchenko, U., Naumenko, V., & Strelnikova, E. (2011) Forced vibrations of tanks partially filled with the liquid under seismic load. Proceedings of the XXXIII Conference Boundary elements and other mesh reduction methods, WITPress, Transaction on Modeling and Simulation. Vol. 52, pp. 285–296.
17. Faltinsen, O.M., & Timokha, A.N. (2009) Sloshing. New York: Cambridge University Press.
18. Butikov, E. (2018) Analytical Expressions for Stability Regions in the Ince–Strutt Diagram of Mathieu Equation. *American Journal of Physics*. **86**, 4, 257–267.